

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А. И. ГЕРЦЕНА

Программа вступительного испытания
по специальной дисциплине
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»
для поступления на программу подготовки научных и
научно-педагогических кадров в аспирантуре
по научной специальности
1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Санкт-Петербург
2025

СТРУКТУРА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ

Пояснительная записка

Цель вступительного экзамена: отобрать абитуриентов, склонных к научно-исследовательской работе, владеющих базовым математическим аппаратом в области математического анализа.

Задачи вступительного экзамена:

- выявление у поступающих базового уровня подготовки в области математического анализа,
- оценка умения и навыков абитуриента, знание материала, его способность к самообразованию,
- определение склонности абитуриента к научным исследованиям, творческому мышлению и логическому выводу.

Форма и порядок проведения вступительного испытания

Вступительное испытание проводится в форме устного экзамена. Абитуриенту предлагается 2 вопроса из перечня программы вступительного испытания. На подготовку дается до 60 минут. В процессе ответа поступающему могут быть заданы уточняющие вопросы. После ответа, абитуриенту могут быть заданы дополнительные вопросы

Основные требования к уровню подготовки абитуриента

Абитуриент должен знать: фундаментальные основы математического анализа, классические теоремы и основные методы; продемонстрировать понимание основных идей, современное состояние математического анализа и основные направления исследований.

Программа вступительного испытания (основное содержание)

1. Теорема Кантора-Бернштейна. Мощность множества. Сравнение мощностей.
2. Топологические пространства; свойства замкнутых множеств; непрерывные отображения.
3. Метрические пространства, топология в них. Пространства R , l_p , $C[a,b]$ Метрика в нормированных пространствах.
4. Полные метрические пространства; примеры R , l_p , $C[a,b]$
- 5 Теорема о вложенных шарах и теорема Бэра.
6. Пополнение по метрике.
7. Принцип сжимающих отображений. Теорема существования и единственности для дифференциального уравнения первого порядка.
8. Принцип сжимающих отображений и решения интегральных уравнений.
9. Компактные топологические пространства и непрерывные отображения в них. Теорема Кантора.
10. Выпуклые множества и функционал Минковского.
11. Теорема Хана-Банаха и отделимость выпуклых множеств.
12. Евклидовы пространства и сепарабельные евклидовы пространства. Теорема об ортогонализации.
13. Неравенства Бесселя; теорема Рисса-Фишера.
14. Превращение нормированного пространства в евклидово.
15. Сопряженное пространство и его полнота. Второе сопряженное пространство.
16. Слабая сходимость в нормированных пространствах. Слабая сходимость в сопряженном пространстве.
17. Ограниченные линейные операторы; их нормы; сумма и произведение ограниченных линейных операторов.
18. Теорема об обратном к линейному ограниченному оператору.
19. Дифференцирование в линейных нормированных пространствах.

20. Мера Лебега.
21. Общее понятие меры; продолжение меры на кольцо.
22. Лебегово продолжение меры (в случае полукольца с единицей).
23. Измеримые функции и их действия над ними. Пределы измеримых функций.
24. Теорема Егорова.
25. Интеграл Лебега; его полная аддитивность и абсолютная непрерывность.
26. Переход к пределу под знаком интеграла Лебега.
27. Понятие аналитической функции. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля аналитической функции. Лемма Шварца.
28. Разложение аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана. Теоремы единственности. Нули аналитических функций. Изолированные особые точки однозначного характера.
29. Вычеты, теорема Коши о вычетах. Принцип аргумента. Теорема Руше. Практические приложения теории вычетов.
30. Целые функции. Рост целой функции, порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями. Разложение целой функции в бесконечное произведение.
31. Конформное отображение. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями: линейной, степенной, радикалом, показательной, логарифмической.
32. Принцип аналитического продолжения. Полная аналитическая функция в смысле Вейерштрасса. Распространение функции действительного переменного на комплексную область по принципу аналитического продолжения.

Рекомендуемая литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976 (1989).
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа, М.: Наука. 1965.
3. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. I и II, М.: Наука, 1967-1968.
4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 2000.
5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977(1981).
6. Шилов Г.Е. Математический анализ функции одного переменного. М.: Наука, 1969.
7. Будаев В.Д., Якубсон М.Я. Математический анализ. Функции одной переменной. СПб: Лань, 2012.
8. Будаев В.Д., Якубсон М.Я. Математический анализ. Функции нескольких переменных. СПб: Лань, 2017.

Критерии оценивания ответа

Ответ на экзамене оценивается по десятибалльной шкале. Минимальный проходной балл – 3.

10 баллов – абитуриент полностью ответил на вопросы билета, а также на дополнительные вопросы. Свободно ориентируется в материале, показал высокую математическую культуру.

8-9 баллов – абитуриент ответил на вопросы билета, а также на дополнительные вопросы с 1-2 незначительными погрешностями, которые самостоятельно исправил после наводящих вопросов. Свободно ориентируется в материале, показал высокую математическую культуру.

6-7 баллов - ответ неполный либо содержащий достаточно существенные неточности. Вместе с тем абитуриент показал хороший уровень математической культуры, понимание и достаточный уровень знаний по программе экзамена.

3-5 баллов - Ответ содержит серьезные неточности и/или ошибки. Уровень знаний и уровень математической культуры находятся на минимально допустимом для аспиранта уровне.

1-2 балла – Ответ на вопросы билета и дополнительные вопросы принципиально неполон и содержит грубые ошибки. Абитуриент не продемонстрировал уровня знаний и математической культуры, минимально необходимых для обучения в аспирантуре и занятий научной работой.

Разработчик: доктор физ.-мат. наук, профессор, В.Д. Будаев