Герценовская олимпиада школьников по профилю «Образование и педагогические науки» 2025
Задание 5. «Вариативное задание». МАТЕМАТИКА
Максимальное количество баллов – 20

Обязательный сюжет

Дана функция $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x + 7}$.

а) Найдите область определения функции $y = f(x)$.

Решение: $$x^2 + 8x + 7 \geq 0$$ $$x^2 + 8x + 7 = 0 \text{ при } x = -7 \text{ и } x = -1$$ Значит $x^2 + 8x + 7 \geq 0$ при $x \leq -7, x \geq -1$
Ответ: $x \leq -7, x \geq -1$. *Другая форма записи ответа: (-∞; -7]∪[-1; +∞)*

б) Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = -3x - 1$.

Решение: $\begin{cases} y = \sqrt{x^2 + 8x + 7} \\ y = -3x - 1 \end{cases}$ (область определения функции $y = f(x)$см. пункт а) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 8x + 7} = -3x - 1 \\ -3x - 1 \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + 8x + 7 = 9x^2 + 6x + 1 \\ 3x < -1 \end{cases}$; $\begin{cases} 8x^2 - 2x - 6 = 0 \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} 4x^2 - x - 3 = 0 \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{3}{4} \end{array} \right. \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases}$; учитывая область определения функции $y = f(x)$, $x = -\frac{3}{4}$. Пусть точка *A* (*x; y*) – точка пересечения графиков. Абсцисса точки $x = -\frac{3}{4}$, найдем ординату. $y\left(-\frac{3}{4}\right) = -3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - 1 = \frac{5}{4}$.
Ответ: $\left(-\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$*или (-* $-\frac{3}{4}; 1\frac{1}{4}$*) или (-0,75; 1,25)*

в) Сравните числа $f(\frac{1}{2})$ и $2f(-\frac{1}{2})$.

Решение: $$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{2} + 7} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \sqrt{11{,}25}$$ $$2f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{4} - 8 \cdot \frac{1}{2} + 7} = 2\sqrt{\frac{13}{4}} = \sqrt{13}$$ $\sqrt{11{,}25} < \sqrt{13}$следовательно$f\left(\frac{1}{2}\right) < 2f(-\frac{1}{2})$.
Ответ: $f\left(\frac{1}{2}\right) < 2f(-\frac{1}{2})$.

г) Найдите все значения параметра a, для которых уравнение $f(x) = a$ имеет два различных корня.

Решение: Уравнение $\sqrt{x^2+8x+7} = a$ имеет решения при $a \geq 0$ Возведем обе части уравнения в квадрат $x^2+8x+7 = a^2$ и приведем к виду $x^2+8x+(7-a^2) = 0$. Данное уравнение будет иметь два различных корня, если его дискриминант больше нуля. Найдем дискриминант, используя формулу для уравнений со вторым четным коэффициентом. $D = 16-(7-a^2) = a^2+9 > 0$ при любом действительном значении a. Следовательно уравнение будет иметь два различных корня при всех значения $a \geq 0$
Ответ: $a \geq 0$

Сюжеты на выбор

(выберите и решите ОДИН из двух сюжетов)

<u>Сюжет 1</u>. Дана функция $f(x) = tgx$.
а) Решите уравнение $f(x) = 1$.

Решение: $$tgx = 1, x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$
Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

б) Упростите выражение $\frac{1}{(f(x))^2+1} - (\cos x)^2$.

Решение: $\frac{1}{\left(f(x)\right)^2+1} - (\cos x)^2 = \frac{1}{tg^2x+1} - \cos^2 x = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} - \cos^2 x = \cos^2 x - \cos^2 x = 0$ **или** $\frac{1}{tg^2x+1} - \cos^2 x = \frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1} - \cos^2 x = \frac{1}{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}} - \cos^2 x = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} - \cos^2 x = \cos^2 x - \cos^2 x = 0$
Ответ: 0

в) Пусть в треугольнике $ABC \angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$, $AC = 2$. Докажите, что площадь треугольника ABC равна $2f(\alpha)$.

Решение: $CB = 2tg\alpha,\ S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2tg\alpha = 2tg\alpha,$ т.е. $S_{ABC} = 2f(\alpha)$ что и требовалось доказать.

г) Выясните, при каком значении α площадь треугольника ABC, данного выше, равна $2\sqrt{3}$.

Решение: $S_{ABC} = 2tg\alpha = 2\sqrt{3}, tg\alpha = \sqrt{3}, \quad \alpha = 60^0$
Ответ: 60^0

Герценовская олимпиада школьников по профилю «Образование и педагогические науки» 2025
Задание 5. «Вариативное задание». МАТЕМАТИКА
Максимальное количество баллов – 20

<u>Сюжет 2</u>. Дана функция $f(x)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x-2}{\left(\frac{1}{2}\right)^x+3}$.

а) Вычислите $f\left(\log_{\sqrt{2}/2}\sqrt{7}\right)$.

Решение:

Вычислим $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\sqrt{2}/2}\sqrt{7}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{7}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}7}=7$

$$f\left(\log_{\sqrt{2}/2}\sqrt{7}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\sqrt{2}/2}\sqrt{7}}-2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\sqrt{2}/2}\sqrt{7}}+3}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{1/2}7}-2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{1/2}7}+3}=\frac{7-2}{7+3}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=0{,}5$$

Ответ: 0,5

б) Решите уравнение $f(x)=\frac{1}{2}$.

Решение:

$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x-2}{\left(\frac{1}{2}\right)^x+3}=\frac{1}{2}$ введем новую переменную $t=\left(\frac{1}{2}\right)^x, t>0$ тогда $\frac{t-2}{t+3}=\frac{1}{2}$ решим уравнение относительно новой переменной.

$2t-4=t+3, t=7$, тогда $\left(\frac{1}{2}\right)^x=7, x=\log_{\frac{1}{2}}7$

Ответ: $\log_{\frac{1}{2}}7$

в) Решите неравенство $f(x)<\frac{1}{2}$.

Решение:

Аналогично пункту б) введем новую переменную и получим неравенство $\frac{t-2}{t+3}<\frac{1}{2}$

$\frac{t-2}{t+3}-\frac{1}{2}<0,$ так как $t+3>0,$ то $2t-4-t-3<0, t-7<0, t<7$

Получили $0<t<7$ или $0<\left(\frac{1}{2}\right)^x<7$. Неравенство $0<\left(\frac{1}{2}\right)^x$ выполняется при любых действительных значениях *x*. Решим неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^x<7,$ так как основание логарифма меньше $1,$ то $x>\log_{\frac{1}{2}}7$

Ответ: $\left(\log_{\frac{1}{2}}7;\ +\infty\right)$

г) Докажите, что если $a\geq 1$, то неравенство $f(x)<a$ выполняется при всех значениях *x*.

Решение:

Аналогично пункту б) введем новую переменную и получим неравенство $\frac{t-2}{t+3}<a$

$\frac{t-2}{t+3}-a<0,$ так как $t+3>0,$ то $t-2-at-3a<0, t(1-a)-(2+3a)<0,$

$t(1-a)<2+3a,$ при $a\geq 1$ выражение $1-a\leq 0,$

$t>0$ при любых действительных значениях x, значит $t(1-a)<0$

$2+3a>0$ при $a\geq 1$

Неравенство $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x-2}{\left(\frac{1}{2}\right)^x+3}<a$ верно при всех $a\geq 1$ что и требовалось доказать.

Герценовская олимпиада школьников по профилю «Образование и педагогические науки» 2025
Задание 5. «Вариативное задание». МАТЕМАТИКА
Максимальное количество баллов – 20

Обязательный сюжет				**Сюжеты на выбор (один из двух)**							
				Сюжет 1				*Сюжет 2*			
а)	б)	в)	г)	а)	б)	в)	г)	а)	б)	в)	г)
2	2	3	3	2	3	3	2	2	2	3	3
			10				10				10

Общее количество баллов 20.